JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **10**, 131–150 (1974)

Zum Rivlin-Problem der Simultanen Inversen Tschebyscheff-Approximation*

HEINZ-GERD HEGERING

Leibniz-Rechenzentrum, D8 München 2, West Germany

Communicated by T. J. Rivlin

1. PROBLEMSTELLUNG UND ÜBERSICHT

Sei R ein normierter linearer Raum und G eine Teilmenge von R. Für ein Element $f \in R$ bezeichne $E_G(f)$ den Minimalabstand bezüglich G und $\mathscr{P}_G(f)$ die Menge der Minimallösungen für f bezüglich G. Für $f \in R$ mit der Eigenschaft $\mathscr{P}_G(f) \neq \phi$ ist der Approximationsoperator A_G definiert durch die Vorschrift $A_G(f) := \mathscr{P}_G(f) \subset G$. Für Elemente $g \in G$ sei weiter definiert: $L(g) := \{f \in R \text{ mit } E_G(f) = \|f - g\|\} = \{f \in R \text{ mit } g \in A_G(f)\}$. Mit diesen Bezeichnungen lautet das *verallgemeinerte Rivlin-Problem* (P).

(P): In R sei eine Familie $\{G_i, i \in I \subset \mathbb{N}\}$ von Teilmengen vorgegeben. Charakterisiere solche Folgen $\{g_i\}$ in R, wo $g_i \in G_i$ und $i \in I$, mit der Eigenschaft $\bigcap_{i\in I} L(g_i) \neq \phi$.

Dieses Problem bedeutet also das Auffinden eines Elementes $f \in R$ bei mehreren "vorgeschriebenen Minimallösungen" g_i, die zudem noch aus im allgemeinen verschiedenen Teilmengen von R stammen. Es liegt insofern eine *simultane inverse* Aufgabenstellung der Approximationstheorie vor.

Rivlin [4] stellte erstmals die obige Frage für folgendes Teilproblem $(\tilde{P})$ von (P), wo nämlich $R = C[0, 1]$—versehen mit der Sup-Norm—und $G_i = P_i := \{p_i \mid p_i \text{ algebraisches Polynom mit grad } p_i = i\}$ für $i \in I = \{0, 1, 2, ..., n\}$. In [2] gab Rivlin ein notwendiges Kriterium für die Existenz eines Elements $f \in \bigcap_{i\in I} L(p_i)$ an; ein solches f bezeichnen wir hier als Rivlin-Funktion. Die Arbeiten von Sprecher [5, 6] enthalten ein weiteres notwendiges Kriterium betreffs $(\tilde{P})$ und je eine Charakterisierung im Falle eines vorgegebenen algebraischen Polynompaares (p_k, p_l) und im Falle eines algebraischen Polynomtripels der speziellen Gestalt (p_0, p_1, p_2).

Die hier vorliegende Arbeit erweitert die Fragestellung wie folgt: Das

* Gekürzte Fassung eines Teils der Dissertation des Verfassers, Universität München 1971.

simultane inverse Problem im Raum $C[a, b]$ wird bezüglich allgemeinerer Teilmengen G_i als denen der gewöhnlichen algebraischen Polynome, nämlich bei allgemeinen Haarsystemen und erweiterten Tschebyscheff-Systemen untersucht. Dabei ergibt sich:

(a) Die notwendigen Kriterien von Rivlin [2] und Sprecher [6] sind übertragbar auf unsere erweiterte Fragestellung (cf. Satz 2 und 3).

(b) Es werden neue notwendige Bedingungsgruppen für die Existenz einer Rivlin-Funktion bezüglich der erweiterten Funktionsklassen angegeben (cf. Satz 4, 5, und 6).

(c) Es werden zwei Charakterisierungssätze angegeben, die das Rivlin-Problem behandeln bei Vorgabe beliebiger Paare sowie Tripel von Linearkombinationen aus Funktionen aus (erweiterten) Haarsystemen. Diese Sätze enthalten für Spezialfälle die Aussagen von Sprecher [5, 6] und erweitern sie (cf. Satz 7 und 8).

(d) Es wird die Anwendbarkeit der Ergebnisse aus (a)–(c) an Beispielen von Repräsentanten bekannter Funktionensysteme (Monome, Tschebyscheff-Polynome, Legendre-Polynome, sin–cos-Terme) dargestellt. Dabei ergibt sich eine besondere Rolle der Tschebyscheff-Polynome zweiter Art.

In unsere Untersuchungen geht folgendes Ergebnis von Deutsch, Morris, und Singer [2] ein, welche das Problem (P) für den Fall, daß G_i lineare Teilräume sind, betrachten.

SATZ 1. *Sei R ein normierter linearer Raum und $\{G_l\}$, $(l = 1, 2,\ldots)$, eine Folge von linearen Teilräumen von R. Seien $g_l \in G_l$, $(l = 1, 2,\ldots)$, vorgegeben. Dann gilt: Es existiert ein Element $f \in R$ mit $f \in \bigcap_l L(g_l)$ genau dann, wenn folgendes erfüllt ist:*

$$\textit{Es existieren } f_l \in R \textit{ mit } f_l \in A_{G_l}^{-1}(0),\ (l = 1, 2,\ldots), \tag{1.1}$$

$$\textit{Es gilt } g_{l+1} - g_l = f_l - f_{l+1},\ (l = 1, 2,\ldots). \tag{1.2}$$

Im übrigen werden in der Arbeit von Deutsch, Morris, und Singer [2] im wesentlichen noch eine Reihe von Ergebnissen entwickelt unter der Voraussetzung, daß der Approximationsoperator linear ist. Solche Ergebnisse sind aber *nicht* anwendbar auf $(\tilde{P})$, da die Existenz von *linearen* Approximationsoperatoren gerade charakteristisch ist für das Vorliegen von Hilbert-Räumen, wie z.B. bei Stoer [7] gezeigt wird.

Im Rest der Arbeit sei R immer der mit der Sup–Norm versehene lineare Raum der auf dem endlichen Intervall $[a, b]$ definierten stetigen reellwertigen

Funktionen. Der nächste Abschnitt stellt die Hilfsmittel für die Abschnitte 3 und 4 zur Verfügung. (Im folgenden wird statt $L(g_m) \cap L(g_n)$ oft auch $L(g_m, g_n)$ bzw. etwas Entsprechendes geschrieben.)

2. Erweiterte Tschebyscheff-Systeme

Definition 1. (a) Die auf dem abgeschlossenen endlichen Intervall $[a, b]$ definierten reellwertigen Funktionen $u_0, u_1, ..., u_n$ bilden ein erweitertes Tschebyscheff-System (kurz: ET-System) der Ordnung z, $z \in \mathbb{N}$, falls gilt: Es ist

$$u_i \in C^{z-1}[a, b], \qquad i = 0(1)n$$

und

$$D^* \begin{pmatrix} 0, 1, ..., n \\ t_0, t_1, ..., t_n \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} u_0^*(t_0) & \cdots & u_0^*(t_n) \\ \vdots & & \vdots \\ u_n^*(t_0) & \cdots & u_n^*(t_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

für alle $(n+1)$-Tupel reeller Zahlen $\{t_l\}_0^n$ mit $a \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant b$, wobei hierbei das Gleichheitszeichen nur gelten darf bei Gruppen von höchstens z aufeinanderfolgenden t_l-Werten. Dabei ist D^* wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
&u_l^*(t_0) := u_l(t_0) \text{ für } l = 0(1)n,\\
&u_l^*(t_m) := u_l(t_m) \text{ für } l = 0(1)n \text{ falls } t_{m-1} < t_m,\ m \in \{1, 2, ..., n\},\\
&u_l^*(t_{i+k}) := u_l^{(k)}(t_i) \text{ für } l = 0(1)n,\ k = 0(1)r \leqslant z-1 \text{ falls}\\
&\quad t_{i-1} < t_i = t_{i+1} = \cdots = t_{i+r-1} < t_{i+r} \qquad (\dagger)
\end{aligned}$$

wo $1 \leqslant i, i+r \leqslant n$ ist und $u_l^{(k)}(t_i)$ die $k$te Ableitung von $u_l(x)$ an der Stelle t_i genommen bedeutet. (Bei $i = 0$ bzw. $i + r - 1 = n$ entfällt natürlich in (†) der linke resp. rechte Term.)

(b) ET-Systeme der Ordnung $n + 1$ (sonstige Voraussetzungen wie in (a)) werden schlechthin als ET-Systeme bezeichnet.

(c) Die Funktionen u_l, $l = 0(1)n$, bilden ein vollständiges ET-System (kurz: ECT-System), falls die Funktionenmenge $\{u_0, u_1, ..., u_r\}$ ein ET-System bildet für jedes $r \in \{0, 1, ..., n\}$.

Jedes ET-System beliebiger Ordnung ist auch ein Tschebyscheff-System (kurz: T-System). Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht.

Definition 2. (a) Ein $(n+1)$-dimensionaler Teilraum Q_n von $C[a, b]$ heißt ein (erweiterter) Haar-Unterraum, wenn er eine Basis $\{u_0, ..., u_n\}$ besitzt, die ein (E)T-System bildet.

(b) Bilden die Funktionen u_l ($l = 0(1)n$) ein T-System bzw. ET-System, so heißt $Q_n := \text{span}(u_0 \ldots, u_n)$ der zugehörige Haar- (resp. erweiterte Haar-) Unterraum.

(c) Ein (E)CT-System heißt auch (erweitertes) Haarsystem.

DEFINITION 3. Seien u_l, $l = 0(1)n$, auf einem Intervall $[a, b]$ definierte Funktionen. Eine Funktion q_n der Form $q_n = \sum_{l=0}^{n} c_l u_l$, $c_l \in \mathbb{R}$ heißt u-Polynom oder auch verallgemeinertes Polynom bzgl. der Funktionen u_l, $l = 0(1)n$. Ein u-Polynom heißt nicht-trivial, falls $\sum_{l=0}^{n} c_l^2 > 0$ gilt. Beispielsweise sind die gewöhnlichen algebraischen Polynome

$p_n(x) := \sum_{l=0}^{n} a_l x^l$ u-Polynome der speziellen Funktionen
$u_l(x) := x^l$, $0 \leqslant l \leqslant n$.

DEFINITION 4. (a) Eine isolierte Nullstelle s_0 einer Funktion $f \in C[a, b]$ mit $s_0 \in (a, b)$ heißt G-Nullstelle, falls $f(x)$ in s_0 nicht das Vorzeichen wechselt. Alle anderen isolierten Nullstellen von $f(x)$ in $[a, b]$ einschließlich möglicherweise der Intervallendpunkte heißen U-Nullstellen.

(b) Die Anzahl der verschiedenen Nullstellen von f in $[a, b]$ wird mit $Z(f)$ bezeichnet. Die Anzahl der Nullstellen von f in $[a, b]$, wo G-Nullstellen je zweimal und U-Nullstellen einfach gezählt werden, bezeichnet $\tilde{Z}(f)$. Die Anzahl der Nullstellen einer genügend oft differenzierbaren Funktion f in $[a, b]$, wobei die Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt werden, wird mit $Z^*(f)$ bezeichnet.

Aufgrund der Definition folgt natürlich sofort, daß gilt: $Z(f) \leqslant \tilde{Z}(f) \leqslant Z^*(f)$. Mit den obigen Bezeichnungen gelten folgende Aussagen.

LEMMA 1. (a) *Sei* (u_l, $l = 0(1)n$) *ein T-System. Dann gilt* $\tilde{Z}(q_n) \leqslant n$ *für jedes nichttriviale u-Polynom* q_n. (*Hier und in den folgenden Sätzen ist* q_n *wie in Definition* 3 *bestimmt.*)

(b) *Ist* u_l ($l = 0(1)n$) *eine Menge stetiger Funktionen auf dem Intervall* $[a, b]$ *und gilt für jedes nichttriviale u-Polynom* q_n *die Relation* $\tilde{Z}(q_n) \leqslant n$, *dann bilden die Funktionen* u_l ($l = 0(1)n$) *ein T-System.*

LEMMA 2. (a) *Sei* (u_l, $l = 0(1)n$) *ein ET-System. Dann gilt* $Z^*(q_n) \leqslant n$ *für jedes nichttriviale u-Polynom* q_n.

(b) *Gilt* $u_l \in C^n[a, b]$, $l = 0(1)n$, *und* $Z^*(q_n) \leqslant n$ *für alle nichttrivialen u-Polynome* q_n, *dann bilden die Funktionen* u_l, $l = 0(1)n$, *ein ET-System.*

Die Beweise von Lemma 1 und 2 findet man bei Karlin und Studden [3]. Dort befinden sich auch eine Fülle von Beispielen für T- und ET-Systeme.

Zu den möglichen u-Polynomen, für die die im folgenden entwickelte Untersuchung der vorliegenden Arbeit gilt, gehören über die gewöhnlichen Polynome hinaus auch z.B. gewisse Exponentialsummen und Summen von sin–cos-Termen.

Es sei daran erinnert, daß für T-Approximationen bezüglich T-Systemen der bekannte Alternantensatz sowie der Eindeutigkeitssatz gelten.

In diesem Zusammenhang seien noch zwei neue Begriffe eingeführt, die in der weiteren Untersuchung eine wichtige Rolle spielen.

DEFINITION 5. (a) Eine Funktion $z \in C[a, b]$ heißt k-Nullalternierende, $k \in \mathbb{N}_0$, genau dann, wenn $k + 2$ Punkte x_i existieren, wobei $a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_{k+2} \leqslant b$, mit der Eigenschaft, daß

$$z(x_i) = (-1)^i \epsilon \| z \|_{[a,b]}, \qquad \epsilon \text{ fest}, \qquad \epsilon \in \{-1, +1\} \qquad \text{für} \quad i = 1(1)k + 2.$$

(b) Sei $z \in C[a, b]$ eine k-Nullalternierende und x_i, $i = 1(1)k + 2$ wie in Teil (a) bestimmt. Dann heißt ein Teilintervall

$$S_i^k(z) \subset [a, b], \qquad i = 1(1)k + 2,$$

k-Abweichungsintervall bezüglich z genau dann, wenn gilt

(α) $S_i^k(z)$ enthält x_i und

(β) $S_i^k(z)$ ist Zusammenhangskomponente von x_i in $[a, b]$ mit der Eigenschaft

$$z(x) = (-1)^i \epsilon \| z \| \qquad \text{für alle} \quad x \in S_i^k(z).$$

(Falls der Bezug eindeutig ist, wird des öfteren auch S_i^k oder $S^k(z)$ statt $S_i^k(z)$ geschrieben und auch vom Abweichungsintervall oder auch von k-Alternierenden gesprochen.)

(c) Ein k-Abweichungsintervall $S_l^k(z)$ heißt $(-)$-Komponente bzw. unteres Abweichungsintervall von z (Bezeichnung: $\underline{S}_l^k(z)$), falls $(-1)^l \epsilon = -1$. Entsprechend heißt ein k-Abweichungsintervall $S_l^k(z)$ eine $(+)$-Komponente oder oberes Abweichungsintervall von z (Bezeichnung: $\bar{S}_l^k(z)$), falls $(-1)^l \epsilon = +1$.

Bemerkung 1. Mit diesen Bezeichnungen sagt Satz 1 im Fall $R = C[a, b]$, und im Fall, daß G_i $(i \in I)$ Haarunterräume sind, aus, daß eine stetige Rivlin-Funktion bezüglich vorgegebener Funktionen $g_i \in G_i$ genau dann existiert, wenn sich i-Nullalternierende f_i $(i \in I)$ mit der Eigenschaft (1.2) finden lassen.

3. Notwendige Kriterien für die Lösbarkeit bestimmter Rivlin-Aufgaben

Die ersten beiden Sätze stellen Übertragungen von Kriterien von Sprecher [6] und Rivlin (in Deutsch, Morris, und Singer [2]) auf die uns gestellte Situation dar. Die Beweise lassen sich analog führen.

Der erste Satz macht dabei eine Aussage bezüglich der möglichen "Abstände" einer Rivlin-Funktion zu gegebenen u-Polynomen, welche aus Haarsystemen gebildet sind.

Satz 2. *Die Funktionen $u_l \in R$, $l = 0(1)n$, mögen ein Haarsystem auf $[a, b]$ bilden. $Q_r := \operatorname{span}(u_0, u_1, ..., u_r)$, $r = 0(1)n$, seien die zugehörigen Haar-Unterräume, aus denen u-Polynome der folgenden Gestalt vorgegeben seien*:

$$q_r = \sum_{l=0}^{r} a_l u_l \in Q_r \qquad \text{mit} \quad a_r \neq 0.$$

Dann gilt: *Notwendig dafür, daß ein $f \in R$ Element der Menge $L(q_{i_0}, q_{i_1}, ..., q_{i_m})$ mit $0 \leqslant i_0 < \cdots < i_m \leqslant n$, $0 \leqslant m \leqslant n$ ist, ist die Gültigkeit der Ungleichung $E_{i_0}(f) > E_{i_1}(f) > \cdots > E_{i_m}(f)$ für die relevanten Minimalabstände.*

(Hier und auch später bedeutet $E_r(f) := \inf_{q \in Q_r} \| f - q \|$, ferner ist die Menge $L(q_i)$ und der Approximationsoperator A_{Q_l} wie in Sektion 1 definiert.)

Die folgende Aussage besagt, daß das Rivlin-Problem nicht für beliebige u-Polynome aus einem vorgegebenen Funktionensystem lösbar ist, sondern die vorgegebenen u-Polynome z.B. dadurch "gekoppelt" sein müssen, daß sie sich gegenseitig in einer Mindestanzahl von verschiedenen Punkten aus $[a, b]$ schneiden müssen.

Satz 3. *Die Funktionen $u_l \in R$, $l = 0(1)n$, mögen ein Haarsystem auf $[a, b]$ bilden, ferner seien u-Polynome $q_r \in Q_r := \operatorname{span}(u_0, u_1, ..., u_r)$, $r = 0(1)n$, vorgegeben.*

Dann gilt folgende Aussage: *Notwendig dafür, daß eine Funktion $f \in R$ Element der Menge $\bigcap_{r=0}^{n} L(q_r)$ ist, ist das Erfülltsein der Bedingung* (N):

(N): *Für jedes Paar von Indizes (i, l) mit $0 \leqslant i < l \leqslant n$ gilt entweder $q_l - q_i \equiv 0$ oder die u-Polynomdifferenz $q_l - q_i$ wechselt das Vorzeichen an mindestens $i + 1$ verschiedenen Punkten des offenen Intervalls (a, b).*

Der folgende Satz schränkt die für die Lösung des Rivlin-Problems geeigneten u-Polynome noch weiter ein, insofern nämlich, als auf bestimmten Teilintervallen von $[a, b]$ ihre Wertevorräte gewissen Mindest—bzw. Höchstschranken unterworfen sein müssen.

SATZ 4. *Die Funktionen $u_l \in R$, $l = 0(1)n$ mögen ein Haarsystem auf $[a, b]$ bilden. Sei*

$$Q_l := \operatorname{span}(u_0, u_1, \ldots, u_l), \qquad l = 0(1)n.$$

Vorgegeben seien u-Polynome

$$q_i = \sum_{w=0}^{i} a_w u_w \in Q_i \text{ mit } a_i \neq 0, \quad i = r(1)\, r + t \leqslant n, \quad r \in \mathbb{N}_0, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Ferner existiere eine Rivlin-Funktion

$$f \in \bigcap_{i=r}^{r+t} L(q_i).$$

Unter diesen Voraussetzungen gelten folgende Aussagen:

(a) *Es existieren Funktionen $f_i \in R$, $i = r(1)r + t$, die i-Alternierende sind* (vergl. Definition 5) *und für die gilt:*

(α) $f_l = f_j - (q_l - q_j)$, $r \leqslant j < l \leqslant r + t$,

(β) $\|f_r\| > \|f_{r+1}\| > \cdots > \|f_{r+t}\|$.

(b) *Seien $S_l^i(f_i)$, $l = 1(1)i + 2$, die den i-Alternierenden f_i, $i = r(1)r + t$, aus Teil* (a) *zugeordneten Abweichungsintervalle* (vergl. Definition 5). *Dann gilt für $m = r(1)r + t - 1$ und $i = 1(1)r + t - m$*

(α) $q_{m+i}(x) - q_m(x) > 0$ *für* $x \in \bar{S}_j^m(f_m)$,

(β) $q_{m+i}(x) - q_m(x) < 0$ *für* $x \in \underline{S}_j^m(f_m)$.

(c) *Mit den Bezeichnungen wie in* (b) *gilt: Es existiert eine streng monoton fallende Folge von $t + 1$ positiven reellen Konstanten $c_r > c_{r+1} > \cdots > c_{r+t}$, sodaß* (mit der Abkürzung $c_{r,s} := c_r - c_s$) *folgende Ungleichungen erfüllt sind:*

(α) *Für alle $m = r(1)r + t - 1$ und $i = 1(1)r + t - m$ ist $c_{m,m+i} \leqslant |q_{m+i}(x) - q_m(x)|$ falls $x \in S_j^m(f_m)$, $j = 1(1)m + 2$;*

(β) *Für alle $m = r(1)r + t$ und $s = r(1)m - 1$ ist $q_m(x) - q_s(x) \leqslant c_{s,m}$ falls $x \in \bar{S}_j^m(f_m)$;*

(γ) *Für alle $m = r(1)r + t$ und $s = r(1)m - 1$ ist $-(q_m(x) - q_s(x)) \leqslant c_{s,m}$ falls $x \in \underline{S}_j^m(f_m)$.*

Beweis. Zu (a): Die Existenz von i-Alternierenden mit der Eigenschaft (α) folgt unmittelbar aus Satz 1 und dem Alternantensatz (siehe auch Bemerkung 1). Ebenso entnimmt man dem Beweis von Satz 1 die Gleichung

$f = f_s + q_s$ für $s = r(1)r + t$. Wegen $0 \in A_{Q_s}^{-1}(f_s)$ folgt dann $E_s(f) = \|f_s\|$ und nach Satz 2 schließlich (β).

Zu (b): (α): Sei x irgendein Punkt eines oberen Abweichungsintervalles $\bar{S}_j^m(f_m)$, d.h. es gilt $f_m(x) = \|f_m\|$. Dann ist wegen Teil (aα) und der Definition der Sup–Norm

$$\|f_{m+i}\| + q_{m+i}(x) - q_m(x) \geqslant f_{m+i}(x) + q_{m+i}(x) - q_m(x) = f_m(x) = \|f_m\|.$$

Wegen Teil (aβ) ist somit $q_{m+i}(x) - q_m(x) \geqslant \|f_m\| - \|f_{m+i}\| > 0$. Also gilt ($\alpha$). Behauptung ($\beta$) folgt ähnlich.

Zu (c): (α): Die Abweichungsintervalle sind entweder (—)-Komponenten oder (+)-Komponenten. Die Behauptung wird für die Komponenten einzeln gezeigt. Sei also zunächst x beliebiger Punkt aus $\bar{S}_j^m(f_m)$. Wegen (bα) ist $q_{m+i}(x) - q_m(x) > 0$, somit

$$|q_{m+i}(x) - q_m(x)| = q_{m+i}(x) - q_m(x).$$

Es ist

$$\|f_{m+i}\| \geqslant f_{m+i}(x) = f_m(x) - (q_{m+i}(x) - q_m(x)) = \|f_m\| - |q_{m+i}(x) - q_m(x)|.$$

Die Behauptung (α) für die (—)-Komponente sowie die Aussagen (β) und (γ) folgen mit ähnlichen Schlußweisen. Schließlich setze man $c_k := \|f_k\|$, $k = r(1)r + t$. Damit ist Satz 4 gezeigt.

Für den Fall, daß ein ECT-System vorliegt und die Rivlin-Aufgabe für ein Tripel "*direkt* aufeinanderfolgender" (vergl. unten) u-Polynome betrachtet wird, kann man die in Satz 3 getroffene Aussage über die notwendige Mindestanzahl von Schnittpunkten gewisser Differenzenpolynome dahingehend verfeinern, daß bei vorausgesetzter Existenz einer Rivlin-Funktion sogar bestimmte eindeutige Zuordnungen dieser Schnittstellen bestehen müssen.

SATZ 5. *Die Funktionen* $u_l \in R$, $l = 0(1)n \geqslant 2$, *mögen ein erweitertes Haarsystem auf dem Intervall* $[a, b]$ *bilden. Sei* $Q_l := \operatorname{span}(u_0, u_1, ..., u_l)$, $l = 0(1)n$. *Gegeben sei ein u-Polynom-Tripel* (q_r, q_{r+1}, q_{r+2}) *mit* $0 \leqslant r$, $r + 2 \leqslant n$ *von u-Polynomen*

$$q_i = \sum_{s=0}^{i} a_s u_s \in Q_i \qquad \textit{mit} \quad a_i \neq 0, \qquad i = r(1)\, r + 2.$$

Es existiere eine Rivlin-Funktion $f \in L(q_r, q_{r+1}, q_{r+2})$. *Dann gelten folgende Aussagen*:

(a) *Die Differenzfunktionen* $q_{r+1} - q_r$, $q_{r+2} - q_r$ *und* $q_{r+2} - q_{r+1}$ *besitzen jeweils nur lauter einfache U-Nullstellen im Innern von* $[a, b]$.

(b) *Seien mit* x_i *die Nullstellen in* $[a, b]$ *von* $q_{r+2}(x) - q_r(x)$ *bezeichnet und mit* y_m *die Nullstellen in* $[a, b]$ *von* $q_{r+1}(x) - q_r(x)$, *jeweils der Größe nach aufsteigend angeordnet. Dann gibt es eine eindeutige paarweise Zuordnung der Nullstellen* x_i *und* y_m *in der Form* $x_i \leftrightarrow y_i$ $(i = 1(1)r + 1)$ *oder in der Form* $x_{i+1} \leftrightarrow y_i$ $(i = 1(1)r + 1)$ *mit der Eigenschaft, daß die zu den Nullstellen gehörigen Differenzpolynome in den sich entsprechenden Nullstellenpaaren gleichsinnig ihr Vorzeichen wechseln.*

(c) *Je nach Zuordnung gemäß Teil* (b) *gilt*

falls $Z(q_{r+2} - q_r) = r + 1$: $\max(x_i, y_i) < \min(x_{i+1}, y_{i+1})$ *für* $i = 1(1)r$,
falls $Z(q_{r+2} - q_r) = r + 2$: *es ist entweder*

$\max(x_i, y_i) < \min(x_{i+1}, y_{i+1})$ *für* $i = 1(1)r$ *und* $x_{r+2} > \max(x_{r+1}, y_r)$ *oder*
$\max(x_{i+1}, y_i) < \min(x_{i+2}, y_{i+1})$ *für* $i = 1(1)r$ *und* $x_1 < \min(x_2, x_1)$.

Beweis. Zu (a): Gemäß Satz 3 hat $q_i(x) - q_l(x)$, $r \leqslant l < i \leqslant r + 2$ mindestens $l + 1$ verschiedene U-Nullstellen in (a, b). Da ein ECT-System zugrunde liegt, gilt gemäß Lemma 2: $Z^*(q_i - q_l) \leqslant i$ (‡), $r \leqslant l < i \leqslant r + 2$. Bleibt zu betrachten die Funktion $q_{r+2}(x) - q_r(x)$: Wäre unter den nach Satz 3 existierenden $r + 1$ verschiedenen U-Nullstellen dieser Funktion eine mehrfache Nullstelle, so müßte sie als U-Nullstelle eine Vielfachheit $v \geqslant 3$ haben mit $v \equiv 1 \bmod (2)$. Das ergäbe aber einen Widerspruch zu (‡). Ebenfalls wegen (‡) könnte, falls $Z(q_{r+2} - q_r) = r + 2$, die Vielfachheit jeder Nullstelle genau nur 1 sein.

Zu (b): Gemäß Satz 4 existieren l-Alternierende f_l $(l = r, r + 1, r + 2)$ zu den drei vorgegebenen u-Polynomen q_l. Insbesondere also existieren $r + 2$ Punkte s_i: $a \leqslant s_1 < s_2 < \cdots < s_{r+2} \leqslant b$ mit

$$f_r(s_i) = (-1)^i \epsilon \, \| f_r \|, \qquad \epsilon = \pm 1 \text{ fest}, \qquad i = 1(1)r + 2. \tag{†}$$

Sei o.B.d.A. $q_{r+1}(t) - q_r(t) > 0$ für $a \leqslant t < y_1$. (Alle Nullstellen von $q_{r+1}(t) - q_r(t)$ liegen ja gemäß Lemma 2 und Satz 3 im Innern von $[a, b]$.) Wegen der Stetigkeit von $q_{r+1} - q_r$ und Satz 4(b) gilt dann

$$a \leqslant s_1 < y_1 < s_2 < y_2 < \cdots < y_{r+1} < s_{r+2} \leqslant b. \tag{††}$$

und in (†) gilt $\epsilon = +1$. Die Funktion $q_{r+2} - q_r$ besitzt gemäß Satz 3 und Teil (a) dieses Satzes mindestens $r + 1$ einfache Nullstellen in (a, b), insgesamt höchstens $r + 2$ Nullstellen. Wegen Satz 4(b), wegen (†) und der Stetigkeit von $q_{r+2} - q_r$ muß in jedem offenen Intervall (s_{i-1}, s_i), $i = 2(1)r + 2$, mindestens eine Nullstelle von $q_{r+2}(t) - q_r(t)$ liegen. Es liegt sogar jeweils genau eine dort:

(1) Fall: $Z(q_{r+2} - q_r) = r + 1$. Dann ist $\{x_i, y_i\} \subset (s_i, s_{i+1})$, $i = 1(1)r + 1$, und es gilt die Behauptung.

(2) Fall: Es sei nun $Z(q_{r+2} - q_r) = r + 2$. Lägen in einem Intervall (s_{l_0-1}, s_{l_0}), $l_0 \in \{2, 3, \ldots, r + 2\}$, zwei Nullstellen von $q_{r+2} - q_r$, so wären sie wegen ihrer Einfachheit U-Nullstellen und es würde gelten

$$\operatorname{sgn}(q_{r+2}(s_{l_0}) - q_r(s_{l_0})) = -\operatorname{sgn}(q_{r+1}(s_{l_0}) - q_r(s_{l_0})), \qquad (\dagger\dagger\dagger)$$

da nicht drei einfache Nullstellen von $q_{r+2} - q_r$ zwischen benachbarten Abweichungspunkten von f_r liegen können. $(\dagger\dagger\dagger)$ ist aber ein Widerspruch zu Satz 4(b). Insgesamt gilt also dann entweder $x_1 < s_1$ und $\{x_{i+1}, y_i\} \subset (s_i, s_{i+1})$ oder $\{x_i, y_i\} \subset (s_i, s_{i+1})$ und $s_{r+2} < x_{r+2}$ für $i = 1(1)r + 1$. Die Paarbildung ist somit eindeutig und durch die Lage von x_1 bestimmt.

Die Gleichsinnigkeit des Nulldurchlaufs folgt wiederum aus $(\dagger)$ und Satz 4(b).

Zu (c): Die Behauptung ergibt sich aus dem vorstehenden Beweisgang zu Teil (a) und (b) unmittelbar.

Somit ist Satz 5 bewiesen.

Zum Abschluß dieses Paragraphen wird noch gezeigt, daß die Auswahl von u-Polynomtripeln, die eine Rivlin-Funktion zulassen, noch dadurch weiter eingeschränkt wird, daß an genau einem Intervallendpunkt R_1 entweder die Relation $q_{r+2}(R_1) < q_{r+1}(R_1) < q_r(R_1)$ oder die Relation $q_{r+2}(R_1) > q_{r+1}(R_1) > q_r(R_1)$ gelten muß. Diese Aussage ist enthalten in folgendem.

Satz 6. *Es mögen die Voraussetzungen von Satz 5 gelten. Dann gilt: An genau einem Randpunkt $R_1 \in \{a, b\}$ haben alle drei Funktionen $q_{r+2}(x) - q_r(x)$, $q_{r+2}(x) - q_{r+1}(x)$ und $q_{r+1}(x) - q_r(x)$ gleiches Vorzeichen.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen gilt

$$Z(q_{r+2} - q_{r+1}) = Z^*(q_{r+2} - q_{r+1}) = r + 2,$$

ebenso $Z^*(q_{r+1} - q_r) = Z(q_{r+1} - q_r) = r + 1$ und alle Nullstellen sind einfache U-Nullstellen im Innern von $[a, b]$. Da ferner $Z(q_{r+2} - q_{r+1}) = Z(q_{r+1} - q_r) + 1$ gilt, folgt notwendig:

$$\operatorname{sgn}\{q_{r+2}(R_1) - q_{r+1}(R_1)\} = \operatorname{sgn}\{q_{r+1}(R_1) - q_r(R_1)\}$$
$$\text{für entweder } R_1 = a \text{ oder } R_1 = b$$

und

$$\operatorname{sgn}\{q_{r+2}(R_2) - q_{r+1}(R_2)\} = -\operatorname{sgn}\{q_{r+1}(R_2) - q_r(R_2)\}$$
$$\text{für } R_2 \in \{a, b\} \text{ mit } R_2 \neq R_1 .$$

Weiterhin gilt $q_{r+2}(x) - q_{r+1}(x) > 0$ (bzw. < 0) genau dann, wenn auch gilt $q_{r+2}(x) - q_r(x) > q_{r+1}(x) - q_r(x)$ (bzw. $< q_{r+1}(x) - q_r(x)$). Zusammen mit dem obigen folgt $\operatorname{sgn}\{q_{r+2}(R_1) - q_r(R_1)\} = \operatorname{sgn}\{q_{r+2}(R_1) - q_{r+1}(R_1)\} = \operatorname{sgn}\{q_{r+1}(R_1) - q_r(R_1)\} = \epsilon$ mit $\epsilon \in \{1, -1\}$.

Damit ist Satz 6 bewiesen.

4. Zwei Charakterisierungssätze

Der erste Charakterisierungssatz verallgemeinert Ergebnisse von Deutsch, Morris, und Singer [2] und Sprecher [5]. Erstere zeigten für den Spezialfall $u_0(x) = 1$ und $u_1(x) = x$, daß die notwendige Bedingung aus Satz 3 auch hinreichend ist für die Existenz einer stetigen Rivlin-Funktion $f \in L(p_0, p_1)$, $p_0 \in \operatorname{span}(1)$, $p_1 \in \operatorname{span}(1, x)$. Sprecher zeigte die Gültigkeit dieser Tatsache für beliebige Paare (p_n, p_m) von algebraischen Polynomen.

Der untenstehende Beweis ist neu. Er macht deutlich, daß die Rivlin-Bedingung sogar dafür ausreicht, die Klasse der möglichen Rivlin-Funktionen in Abhängigkeit von Eigenschaften der vorgegebenen u-Polynome noch besser zu charakterisieren. Das hier entwickelte Konstruktionsprinzip, welches mit dem Satz 4(a) bzw. dem Satz 1 eng verknüpft ist, läßt sich auch auf kompliziertere Fälle ausdehnen, so z.B. ist es auch in Satz 8 nützlich.

Satz 7. *Die Funktionen $u_l \in R$, $l = 0(1)n$, mögen ein Haarsystem auf dem Intervall $[a, b]$ bilden. Mit Q_r, $r = 0(1)n$, seien die von u_l, $l = 0(1)r$, erzeugten Haarunterräume bezeichnet. Seien verallgemeinerte Polynome $q_m \in Q_m$ und $q_t \in Q_t$, $0 \leqslant m < t \leqslant n$, mit $q_t \not\equiv q_m$ vorgegeben. Es sei $q_t \in C^h[a, b]$ und $q_m \in C^l$, $h \in \mathbb{N}_0 \ni l$, $(h, l = \infty$* zugelassen) *Dann gilt: Es existiert eine Funktion $f \in C^{\min(h,l)}[a, b]$ mit $f \in L(q_m, q_t)$ genau dann, wenn $q_t - q_m$ mindestens $m + 1$ verschiedene U-Nullstellen im Innern von $[a, b]$ hat.*

Beweis. Notwendigkeit: Wegen $C^{\min(h,l)} \subset C^0$, folgt die Beh. aus Satz 3.

Beweis der Hinlänglichkeit der Bedingung.

Vorbereitendes

Mit x_i $(i = 1,..., k \geqslant m + 1)$ seien die k Stellen bezeichnet, in denen die Funktion $d(x) := q_t(x) - q_m(x)$ in $[a, b]$ das Vorzeichen wechselt. Die Anordnung dieser U-Nullstellen sei $x_0 := a < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < b$. Das Intervall $[a, b]$ werde wie folgt unterteilt: Es sei $\tilde{B}_{l-1} := [x_{l-1}, x_l]$ für $l = 1(1)m + 1$ und $\tilde{B}_{m+1} := [x_{m+1}, b]$. Nun wähle Teilintervalle $B_{l-1} := [\alpha_{l-1}, \beta_{l-1}] \subset \tilde{B}_{l-1}$, $l = 1(1)m + 2$, mit folgenden drei Eigenschaften:

(a) $x_{l-1} < \alpha_{l-1} < \beta_{l-1} < x_l$ für $l = 1(1)m + 1$;

(b) $x_{m+1} < \alpha_{m+1} < \beta_{m+1} < b$ falls $k = m + 1$,

$x_{m+1} < \alpha_{m+1} < \beta_{m+1} < x_{m+2}$ falls $k > m + 1$;

(c) $d(x) \neq 0$ für alle $x \in B_l$, $l = 0(1)m + 1$.

Wegen $d \not\equiv 0$ existieren solche Teilintervalle immer. Nun werde noch eine Konstante c_m gewählt, die der Bedingung $c_m > \| d \|$ genügt. Für die Definition der Nullalternierenden wird jedoch noch folgendes Lemma benötigt: (vergl. De Rham [1, Seite 4]).

LEMMA 3. *Sei M_1 eine kompakte Teilmenge aus $\mathbb{R}^n$ und M_3 eine M_1 umfassende offene Teilmenge. Dann existiert eine auf M_3 definierte Funktion F mit kompaktem Träger M_2, wobei $M_1 \subset M_2 \subset M_3$, mit folgenden Eigenschaften*

(a) $F \in C^\infty[M_3]$,

(b) $F(x) = 1$ *für* $x \in M_1$,

(c) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ *für* $x \in M_2 - M_1$.

Konstruktion einer m-Alternierenden

Sei $Z_i := [v_i, b_i] \subset B_i$ mit $\alpha_i < v_i < b_i < \beta_i$ für $i = 0(1)m + 1$. Die Anwendung des Lemmas 3 mit $M_1 = Z_i$ und $M_3 = B_i$, $i = 0(1)m + 1$, garantiert die Existenz eines Elementes $f_m{}^i \in C^\infty[B_i]$ mit der Eigenschaft

$$1 = \| f_m{}^i \|_{B_i} = f_m{}^i(x) \qquad \text{für} \quad x \in Z_i \qquad \text{und} \quad 0 \leqslant f_m{}^i(x) \leqslant 1 \text{ sonst.}$$

Nun wird für $x \in [a, b]$ definiert

$$f_m{}^*(x) := \begin{cases} c_m \cdot \operatorname{sgn}\{q_t(x) - q_m(x)\} \cdot f_m{}^i(x) & \text{falls } x \in B_i,\ i \in \{0, 1, \ldots, m + 1\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar ist auch $f_m{}^* \in C^\infty[a, b]$, ferner $\| f_m{}^* \|_{[a,b]} = c_m$ und $f_m{}^* \in A_{Q_m}^{-1}(0)$.

Konstruktion einer t-Nullalternierenden

Sei nun definiert $g := \min_{0 \leqslant l \leqslant m+1}\{\min_{x \in B_l}(c_m - | d(x)|)\}$. Wegen $B_l \subset \tilde{B}_l$ ist *lt.* Konstruktion $g > 0$ und $c_t{}^* := c_m - g > 0$. Mit diesen Bezeichnungen gilt nach Teil 1: $\| f_m{}^* - d \| \leqslant c_t{}^*$. Wähle c_t mit $c_t{}^* \leqslant c_t < c_m$ und fixiere irgendeinen Nulldurchgang x_s von $d(x)$, $s \in \{1, \ldots, m + 1\}$.

Wegen der Stetigkeit von $d(x)$ läßt sich eine Umgebung $U := U(x_s) = [h_1, h_2]$ angeben mit den zwei Eigenschaften

(a) $\beta_{s-1} \leqslant h_1 < x_s < h_2 \leqslant \alpha_s$,

(b) $\| q_t - q_m \|_U = \| d \| \leqslant c_m - c_t$.

In $U := U(x_s)$ wähle man Punkte r_i $(i = 1(1)t + 1)$ mit

$$h_1 := r_0 < r_1 < \cdots < r_{t+1} < r_{r+2} := h_2 .$$

Ferner sei

$$U_i := [r_{i-1}, r_i], \qquad i = 1(1)t + 2, \qquad \text{und} \qquad \tilde{U}_i := [\tilde{r}_{i-1}, \tilde{r}_i] \subset U_i$$
$$\text{mit} \quad r_{i-1} < \tilde{r}_{i-1} < \tilde{r}_i < r_i \qquad \text{für} \quad i = 1(1)t + 2.$$

Die Anwendung des Lemmas 3 mit $M_1 = U_i$ und $M_3 = \tilde{U}_i$, $i = 1(1)t + 2$, garantiert wieder die Existenz eines $f_t^i \in C^\infty[U_i]$ mit der Eigenschaft

$$1 = \|f_t^i\|_{U_i} = f_t^i(x) \qquad \text{für} \quad x \in \tilde{U}_i \qquad \text{und} \quad 0 \leqslant f_t^i(x) \leqslant 1 \text{ sonst.}$$

Nun wird für $x \in [a, b]$ definiert

$$f_t^*(x) := \begin{cases} (-1)^i \cdot c_t \cdot f_t^i(x) & \text{falls} \quad x \in U_i, \qquad i \in \{1, 2, \ldots, t + 2\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auch hier gilt $f_t^* \in C^\infty[a, b]$, ferner $\|f_t^*\|_{[a,b]} = c_t$ und $f_t^* \in A_{Q_t}^{-1}(0)$.

Definition der gesuchten Funktion $f \in L(q_t, q_m)$

Sei

$$f_m(x) := \begin{cases} f_m^* & \text{für} \quad x \in [a, b] - U, \\ f_t^*(x) + (q_t(x) - q_m(x) & \text{für} \quad x \in U, \end{cases}$$

und

$$f_t(x) := f_m(x) - (q_t(x) - q_m(x)) \qquad \text{für} \quad x \in [a, b].$$

Schließlich sei definiert $f(x) := f_m(x) + q_m(x)$ für $x \in [a, b]$. Gemäß Konstruktion und dem Alternantensatz ist $f \in L(q_m) \cap L(q_t)$. Es gilt jedoch zusätzlich $f \in C^{\min(l,h)}[a, b]$; denn $(q_t - q_m) \in C^{(\min l,h)}$ und $f_m^* \in C^\infty$ und $f_t^* \in C^\infty$.

Damit ist Satz 7 bewiesen.

Bemerkung 2. Für den Spezialfall, daß q_t und q_m gewöhnliche algebraische Polynome sind, ergibt sich also, daß es immer möglich ist, eine Rivlin-Funktion f mit $f \in C^\infty[a, b]$ zu finden, falls $q_t - q_m$ sein Vorzeichen an mindestens $m + 1$ Stellen in (a, b) wechselt. Dieses Ergebnis ist eine Verschärfung der Aussage von Sprecher [5].

In der Arbeit von Deutsch, Morris, und Singer [2] klingt im Anschluß an das notwendige Kriterium von Rivlin die Frage an, inwieweit dieses Kriterium auch hinreichend sei. Für den Fall eines u-Polynompaares haben wir oben die Vermutung bestätigt. Daß die zitierte Vermutung bereits für die Vorgabe von Funktionentripeln nicht zutrifft, zeigten die Sätze 4–6, die außer dem Rivlin-Kriterium noch gewisse weitere "Verzahnungen" der Vorgabefunktionen als notwendig bewiesen. Es stellt sich nun heraus, daß die sich aus den Sätzen 4–6 ergebenden Zusatzforderungen auch hinreichend sind für die Existenz einer Rivlin-Funktion bei vorgegebenem u-Polynomtripel.

Zur Vorbereitung von Satz 8 (s.u.) untersuchen wir folgende *Situation* (V):

(V): Die Funktionen $u_l \in R$, $l = 0(1)n \geqslant 2$, mögen ein erweitertes Haarsystem auf $[a, b]$ bilden. Es sei

$$Q_l := \operatorname{span}(u_0, \dots, u_l), \qquad l = 0(1)n.$$

Ferner seien gegeben u-Polynome

$$q_i = \sum_{s=0}^{i} a_s u_s \in Q_i \qquad \text{mit} \quad a_i \neq 0$$

für $i = r, r+1, r+2$ und $0 \leqslant r, r+2 \leqslant n$. Mit x_i ($x_k < x_m$ für $k < m$) seien die Nullstellen in $[a, b]$ von $d_{20}(x) := q_{r+2}(x) - q_r(x)$ bezeichnet, entsprechend mit y_i bzw. z_i die Nullstellen von

$$d_{10}(x) := q_{r+1}(x) - q_r(x) \text{ resp. } d_{21}(x) := q_{r+2}(x) - q_{r+1}(x).$$

Offenbar gilt $d_{21}(x) = d_{20}(x) - d_{10}(x)$.

Wir sagen nun, die gegebenen u-Polynome erfüllen die *Nullstellenbedingung* (NB), wenn die Situation (V) vorliegt und gilt:

(NB): (1) $Z(d_{21}) = r + 2$, $Z(d_{10}) = r + 1$, $Z(d_{20}) \geqslant r + 1$,

(2) alle Nullstellen von $d_{21}(x)$ und $d_{10}(x)$ liegen im Innern von $[a, b]$,

(3) alle Nullstellen von $d_{20}(x)$ sind einfach und mindestens $r + 1$ davon liegen im Innern von $[a, b]$.

Bezüglich (NB)3. werden wir im folgenden o.B.d.A. voraussetzen, daß gilt $x_1 > a$, und ferner lassen wir $x_{r+2} \geqslant b$ zu. Das ist keine Einschränkung, da der Fall $x_1 \leqslant a$ bzgl. des Intervalls "symmetrisch" dazu liegt.

Gelte nun (V) und (NB) mit $x > a$. Dann gibt es zu jeder Differenzfunktion

$$d_{kl}(x) = q_{r+k}(x) - q_{r+l}(x) \qquad \text{mit} \quad 0 \leqslant l < k \leqslant 2$$

innere Punkte $h_i \in [a, b]$, $i = 1(1)m \geqslant l + 1$, derart, daß $d_{kl}(x)$ in h_i sein Vorzeichen wechselt. Es sei nun definiert:

$$J_1^{kl} := [a, h_1], \qquad J_{i+1}^{kl} := [h_i, h_{i+1}] \qquad \text{für} \quad i = 1(1)l, \qquad J_{l+2}^{kl} := [h_{l+1}, b].$$

(Im Falle $x_1 = a$ wären nur die Indizes entsprechend zu modifizieren.)

Ferner kürzen wir ab:

$$\bar{J}_i^{kl} := \{x \in J_i^{kl} \quad \text{und} \quad d_{kl}(x) > 0\},$$
$$\underline{J}_i^{kl} := \{x \in J_i^{kl} \quad \text{und} \quad d_{kl}(x) < 0\},$$
$$\bar{D}_i := \bar{J}_i^{10} \cap \bar{J}_i^{20}, \qquad \underline{D}_i := \underline{J}_i^{10} \cap \underline{J}_i^{20}, \quad \text{jeweils } i \text{ passend aus } \{1,\ldots, r+2\}$$

Mithilfe der soeben definierten Teilmengen des Intervalls $[a, b]$ werden nun folgende Größen definiert:

$$n_1 := \min \{\min_i \| d_{10} \|_{\underline{D}_i}, \quad \min_s \| d_{10} \|_{\bar{D}_s}\},$$
$$n_2 := \min \{\min_i \| d_{20} \|_{\underline{D}_i}, \quad \min_s \| d_{20} \|_{\bar{D}_s}\},$$
$$n_3 := \min_{1 \leqslant i \leqslant r+3} \| d_{21} \|_{J_i^{21}} .$$

Es bedeutet also z.B. n_1 das Minimum der T-Norm-Werte, die d_{10} annimmt auf allen Teilintervallen von $[a, b]$, in denen $d_{10}(x)$ und $d_{20}(x)$ gleiches Vorzeichen aufweisen.

Bevor wir den Satz 8 angeben, werden noch zwei Bedingungen formuliert. Wir sagen, die in (V) gegebenen u-Polynome erfüllen die *Bedingung der Relativen Nullstellenlage* (*NL*), wenn gilt:

(NL): Für die Nullstellen von $d_{10}(x)$ und $d_{20}(x)$ gilt (NB) und

(a) falls $Z(q_{r+2} - q_r) = r + 1$, dann ist $\max(x_i, y_i) < \min(x_{i+1}, y_{i+1})$, für $i = 1(1)r$,

(b) falls $Z(q_{r+2} - q_r) > r + 1$, dann ist entweder

(1) $\max(x_i, y_i) < \min(x_{i+1}, y_{i+1}), i = 1(1)r$ und $x_{r+2} > \max(x_{r+1}, y_{r+1})$

oder

(2) $\max(x_{i+1}, y_i) < \min(x_{i+2}, y_{i+1}), i = 1(1)r$ und $x_1 < \min(x_2, y_1)$.

Die in (V) gegebenen Funktionen erfüllen die *Randbedingung* (*RB*), wenn gilt:

(RB): An genau einem Intervallendpunkt R_1 von $[a, b]$ haben $d_{10}(x)$, $d_{20}(x)$ und $d_{21}(x)$ gleiches Vorzeichen.

Wenden wir uns nun der Formulierung des Satzes 8 zu.

SATZ 8. *Es liege die Situation* (V) *vor und es mögen die vorstehenden Bezeichnungen gelten. Dann ist folgende Charakterisierung möglich: Es existiert ein $f \in R$ mit $f \in L(q_r, q_{r+1}, q_{r+2})$ genau dann, wenn Folgendes erfüllt ist:*

(1) *Die vorgegebenen u-Polynome erfüllen die Forderungen* (NB), (NL), (RB).

(2) *Es lassen sich positive reelle Konstanten* k_1 *und* k_3 *angeben mit folgenden Eigenschaften*:

(a) $k_1 \leqslant n_1$, $k_3 \leqslant n_3$ *und* $k_1 + k_3 =: k_2 \leqslant n_2$;

(b) *Es existiert ein nichtentartetes Teilintervall* $U \subset [a, b]$ *mit der Eigenschaft, daß gilt*

$$|d_{20}(x)| \leqslant k_2 \qquad \textit{und} \qquad |d_{21}(x)| \leqslant k_3 \qquad \textit{für alle} \quad x \in U.$$

(c) *Sei*

$$\bar{E}_i^{21} := \{x \in \bar{J}_i^{21} \text{ mit } k_3 \leqslant |d_{21}(x)|\}$$

und

$$\underline{E}_l^{21} := \{x \in \underline{J}_l^{21} \text{ mit } k_3 \leqslant |d_{21}(x)|\},$$

l und i passend aus $\{1,..., r + 3\}$. *Dann gilt*: *für jedes i ist* $\{x \in \bar{E}_i^{21}$ mit $d_{10}(x) \leqslant k_1\} \neq \phi$ *und für jedes l ist* $\{x \in \underline{E}_l^{21}$ mit $-d_{10}(x) \leqslant k_1\} \neq \phi$.

Geometrische Bedeutung der Bedingungen

(1) (NB) und (RB) stimmen die "Breite" des Approximationsintervalls und die vorgegebenen u-Polynome aufeinander ab.

(2) (NL) und (2b) fordern eine bestimmte "Verzahnung" der Nullstellen der Differenzfunktionen. Dabei besorgt (NL) eine gewisse Trennbarkeit und (2b) eine Verdichtung der Nullstellen an mindestens einer Stelle in $[a, b]$, denn das in (2b) geforderte U wird i.A. eine "Nachbarschaft" eines Nullstellenpaares (x, z) von Nullstellen von $d_{20}(x)$ und $d_{21}(x)$ sein.

(3) (2a) und insbesondere (2c) korreliert die Verläufe der Graphen der Differenzfunktionen (und damit der gegebenen u-Polynome) außerhalb der Nullstellen (resp. Schnittstellen) und sorgt dafür, daß sich die Funktionen nur "zulässig weit" voneinander "entfernen." So wird z.B. in (2c) gefordert, daß dort, wo $d_{21}(x)$ den Wert k_3 überschreitet, jeweils mindestens an einer Stelle dieser Teilintervalle zugleich $d_{10}(x)$ nicht größer als k_1 ist.

Beweis von Satz 8. (A) Notwendigkeit: Voraussetzung ist, daß ein $f \in L(q_r, q_{r+1}, q_{r+2})$ existiert.

Zu 1.: (NB) folgt aus Satz 3, (NL) aus Satz 5, und (RB) aus Satz 6.

Zu 2.: Diese Bedingungsgruppe folgt unmittelbar aus Satz 4. Man betrachte nämlich die dortigen Aussagen für den Fall $t = 2$, setze $k_1 := c_{r,r+1}$, $k_2 := c_{r,r+2}$, $k_3 := c_{r+1,r+2}$ und beachte die Definitionen der Konstanten n_1, n_2, n_3.

(B) Hinlänglichkeit (Beweisskizze): Hier spielt die Äquivalenzaussage von Satz 1 eine wesentliche Rolle. Der Beweis wird in zwei Schritten geführt.

(1) Es wird zunächst gezeigt, daß aufgrund der Satzvoraussetzungen je genau $k+2$ "qualifizierte" k-Abweichungsintervalle S_l^k $(l = 1(1)k+2)$ $k = r(1)r+2$ für die gemäß Satz 1 zu konstruierenden k-Nullalternierenden f_k existieren. Dabei sind unter "qualifizierten" k-Abweichungsintervallen solche Teilintervalle von $[a, b]$ zu verstehen, in denen in Kompatibilität zu Satz 4 (vergleiche dortigen Beweis) die Abweichungspunkte der zu konstruierenden k-Alternierenden f gewählt werden können.

(2) Die k-Alternierenden f_k, $k = r(1)r+2$, werden konstruiert und daraus eine gesuchte Funktion $f \in L(q_r, q_{r+1}, q_{r+2})$ bestimmt. Man wähle $g_2 > 2\max\{\| d_{10} \|, \| d_{20} \|, \| d_{21} \|\}$, wobei die Norm bzgl. des Intervalls $[a, b]$ gerechnet ist und setze $g_1 := g_2 + k_3$, $g_0 := g_2 + k_2 = g_1 + k_1$, wobei die k_i $(i = 1(1)3)$ die Konstanten aus der Satzvoraussetzung sind. Dann gilt $g_2 < g_1 < g_0$. Es werden sodann die i-Alternierenden f_i, $i = r(1)r+2$, so konstruiert, daß gilt $\|f_{r+i}\| = g_i$. Gemäß Teil (1) existieren genau $i+2$ qualifizierte Intervalle S_l^i, $l = 1(1)i+2$, $i = r(1)r+2$. Man wähle nun Punkte $s_l^i \in S_l^i$, $l = 1(1)i+2$, für $i = r$ und $i = r+1$ mit der Eigenschaft $s_l^r < s_{l+1}^{r+1}$, $l = 1(1)r+2$. Ferner sei s_l^{r+2}, $l = 1(1)r+4$, aus u gewählt mit $s_j^{r+2} \neq s_w^{r+2}$ für $j \neq w$.

In Anwendung von Satz 1 und dem Alternantensatz ist nun eine stetige Funktion $f_r(x)$ auf $[a, b]$ zu konstruieren, welche die folgenden Eigenschaften (E) hat:

(E): (a) Es gilt $f_r(s_l^r) = (-1)^l g_0$, $l = 1(1)r+2$, ansonsten $|f_r(x)| \leqslant g_0$ für $x \in [a, b]$.

(b) Es gilt $f_r(s_l^{r+1}) - d_{10}(s_l^{r+1}) = (-1)^l g_1$, $l = 1(1)r+3$, ansonsten $|f_r(x) - d_{10}(x)| \leqslant g_1$ für $x \in [a, b]$.

(c) Es gilt $f_r(s_l^{r+2}) - d_{20}(s_l^{r+2}) = (-1)^l g_2$, $l = 1(1)r+4$, ansonsten $|f_r(x) - d_{20}(x)| \leqslant g_2$ für $x \in [a, b]$.

Eine solche stetige Funktion $f_r(x)$ läßt sich aufgrund der Lipschitz-Beschränktheit der Vorgabepolynome ähnlich wie im Beweis von Satz 7 konstruieren, wobei man nur die Trägersegmente von f_r hinreichend klein zu wählen hat. Mithilfe von $f_r(x)$ werden nun auch die beiden anderen Alternierenden f_{r+1} und f_{r+2} definiert auf $[a, b]$ gemäß

$$\begin{aligned} f_{r+1}(x) &:= f_r(x) - d_{10}(x) = f_r(x) - (q_{r+1}(x) - q_r(x)), \\ f_{r+2}(x) &:= f_{r+1}(x) - d_{21}(x) = f_{r+1}(x) - (q_{r+2}(x) - q_{r+1}(x)) \\ &= f_r(x) - (q_{r+2}(x) - q_r(x)). \end{aligned}$$

Gemäß den Eigenschaften der Differenzpolynome in den Intervallen U und

S_l^{r+i}, $l = 1(1)r + i + 2$ und $i \in \{0, 1\}$, folgt nun, daß f_{r+i}, $i = 0(1)2$, den Eigenschaften (E) genügen. Der Alternantensatz besagt dann $f_l \in A_{Q_l}^{-1}(0)$, $l = r(1)r + 2$.

Weiterhin gilt nach Konstruktion $f_i = f_l - (q_i - q_l)$, $r \leqslant l < i \leqslant r + 2$, und gemäß der Wahl von g_0, g_1, g_2 wegen $k_1 = \|f_r\| - \|f_{r+1}\|$, $k_2 = \|f_r\| - \|f_{r+2}\|$ sowie $k_3 = \|f_{r+1}\| - \|f_{r+2}\|$ auch $\|f_r\| > \|f_{r+1}\| > \|f_{r+2}\|$. Definieren wir schließlich $f(x) := f_r(x) + q_r(x)$, $x \in [a, b]$, so ist $f \in C[a, b]$ und wegen $f_i + q_i = f_l + q_l$, $r \leqslant l \leqslant i \leqslant r + 2$ und den Eigenschaften von f_i, $i = r(1)r + 2$, gilt $f \in L(q_r, q_{r+1}, q_{r+2})$.

Bemerkung 3. (a) Die gemäß Satz 7 bzw. 8 existierende Rivlin-Funktion f ist nicht eindeutig bestimmt.

(b) Der von Sprecher [6] bewiesene Charakterisierungssatz ist als Spezialfall in Satz 8 enthalten, nämlich für den Fall, daß (1) $u_i(x) := x^i$, $i = 0(1)n$, (2) $r = 0$ und (3) $[a, b] = [0, 1]$.

5. Beispiele

5.1. *Die Monome* $q_n(x) = x^n$, $n \geqslant 0$, im Intervall $[a, b] = [0, 1]$.

Behauptung. Es gilt $\bigcap_{i=k}^{k+l} L(q_i) = \phi$, $k \geqslant 0$, $l \geqslant 1$.

Beweis. Gemäß Satz 3 ist notwendig für die Existenz einer Rivlin-Funktion, daß jede Differenz $x^n - x^m$ mit $k \leqslant m < n \leqslant k + l$ mindestens $m + 1$ Vorzeichenwechsel im Innern von $[a, b]$ hat. Die Funktion $x^n - x^{n-1}$, $n \geqslant 1$, hat höchstens n Nullstellen. Im Punkt $x = 1$ haben alle Polynome $x^n - x^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$) eine Nullstelle. Somit kann $x^n - x^{n-1}$ höchstens $n - 1$ Nullstellen bzw. Vorzeichenwechsel im Innern des Intervalls [0, 1] besitzen.

5.2. *Legendre-Polynome und Tschebyscheff-Polynome erster Art*, $[a, b] = [-1, +1]$

$$L_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \qquad n \in \mathbb{N}_0\text{, (Legendre–Polynome),}$$

$$T_n(x) := \cos(n \arccos x), \qquad n \in \mathbb{N}_0\text{, (T–Polynome 1.Art).}$$

Behauptung. Sowohl für $q_n(x) = T_n(x)$ wie auch für $q_n(x) = L_n(x)$, $n \geqslant 0$, gilt $L(q_n) \cap L(q_{n+1}) = \phi$, d.h. es existiert keine Rivlin-Funktion.

Beweis. Es ist grad T_n = grad $L_n = n$ ferner $T_n(1) = L_n(1) = 1$ für $n \geqslant 0$. Somit ist das Kriterium des Satzes 3 verletzt.

5.3. *Die Funktionen* 1, cos t, sin t. Die Funktionen $u_0{}^*(t) = 1$, $u_1{}^*(t) =$

$\cos t$, $u_2^*(t) = \sin t$ bilden ein ECT-System in jedem Intervall $[a, b]$, welches kein ganzzahliges Vielfaches von π oder die Null enthält.

Es existiert aber keine Rivlin-Funktion $f \in L(u_0^*, u_1^*, u_2^*)$, da wegen $u_0^*(t) \geqslant \max\{u_1^*(t), u_2^*(t)\}$ für alle $t \in [a, b]$ die Bedingung (NL) aus Satz 8 nie erfüllt sein kann.

Jedoch existiert z.B. im Intervall $[0, 2\pi - 0.01]$ ein $f \in L(u_1^*, u_2^*)$ aufgrund von Satz 7, da Punkte t_1, t_2 mit $0 < t_1 < t_2 < 2\pi - 0.01$ existieren, sodaß $\cos t_l = \sin t_l$, $l \in \{1, 2\}$, und weil $\{1, \cos t, \sin t\}$ ein T-System bilden für $0 \leqslant t < 2\pi$.

5.4. *Die Tschebyscheff-Polynome 2.Art*, $[a, b] = [-1, +1]$. Die Tschebyscheff-Polynome zweiter Art sind auf $[a, b]$ wie folgt definiert:

$$U_n(x) := [\sin((n+1) \arccos x)]/\sin \arccos x, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{5.1}$$

So ist z.B.

$$U_0(x) = 1, \qquad U_1(x) = 2x, \qquad U_2(x) = 4x^2 - 1, \qquad U_3(x) = 8x^3 - 4x.$$

Die Polynome U_n genügen für $n \geqslant 0$ der Funktionalgleichung

$$U_{n+2}(x) - U_n(x) = 2 \cdot T_{n+2}(x) \tag{5.2}$$

und die Nullstellen von $U_n(x)$, $n \geqslant 1$, sind

$$x_i^{(n)} = -\cos(i/(n+1)\pi), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{5.3}$$

Ferner gilt

$$U_l(1) = l + 1, \qquad l \in \mathbb{N}_0, \tag{5.4}$$

$$U_l(-x) = (-1)^l U_l(x), \qquad l \in \mathbb{N}_0. \tag{5.5}$$

Aufgrund der Eigenschaften (5.2)–(5.5) lassen sich folgende Aussagen unschwer verifizieren, welche besagen, daß die T-Polynome zweiter Art hinsichtlich der in dieser Arbeit betrachteten Fragestellung eine besondere Rolle spielen. Bei dem Nachweis werden die Charakterisierungssätze 7 und 8 angewendet.

Behauptung 1. Für jedes Polynompaar (U_n, U_{n+2}), $n \geqslant 0$, existiert eine Funktion $f \in C^\infty[a, b]$ mit $f \in L(U_n, U_{n+2})$.

Behauptung 2. Für jedes $n \geqslant 0$ gilt $L(U_n, U_{n+1}) \neq \phi$.

Behauptung 3. Jedes Tripel (U_n, U_{n+1}, U_{n+2}), $n \geqslant 0$, erfüllt die Nullstellenbedingung (NB).

Behauptung 4. Jedes Tripel (U_n, U_{n+1}, U_{n+2}), $n \geqslant 0$, erfüllt die Randbedingung (RB), und zwar mit $R_1 = +1$.

Behauptung 5. Jedes Tripel (U_n, U_{n+1}, U_{n+2}), $n \geqslant 0$, erfüllt die Bedingung (NL) über die relative Nullstellenlage, genauer gilt $x_1 < \min(x_2, y_1)$ und $\max(x_{i+1}, y_i) < \min(x_{i+2}, y_{i+1})$, für $1 \leqslant i \leqslant n$. Dabei sind $x_i (i = 1(1)n + 2)$ bzw. y_i $(i = 1(1)n + 1)$ die der Größe nach wachsend angeordneten Nullstellen der Differenzpolynome $U_{n+2}(x) - U_n(x)$ resp. $U_{n+1}(x) - U_n(x)$.

Die Behauptungen 3–5 zeigten, daß für jedes Tripel (U_n, U_{n+1}, U_{n+2}), $n \in \mathbb{N}_0$, gewisse notwendige Kriterien für die Lösbarkeit des Rivlin-Problems erfüllt sind. Abschließend soll noch ein spezielles Tripel von T-Polynomen 2.Art angegeben werden, für das das Erfülltsein der hinreichenden Bedinungen des Satzes 8 leicht nachgerechnet werden kann, d.h. also, für das eine Rivlin-Funktion existiert. Dieses Tripel ist zugleich ein Beispiel für ein Rivlin-Problem, welches nicht durch das Ergebnis von Sprecher [6], wohl aber durch Satz 8, erfaßt wird.

Behauptung 6. Für das Polynomtripel (U_1, U_2, U_3) sind alle Bedingungen des Satzes 8 erfüllt, d.h. es gilt $L(U_1, U_2, U_3) \neq \phi$.

Literatur

1. G. De Rham, "Varietés differentiables," Hermann et Cie Editeurs, Paris, 1955.
2. F. Deutsch, P. D. Morris, and I. Singer, On a problem of T. J. Rivlin in approximation theory, *J. Approximation Theory* **2** (1969), 342–352.
3. S. Karlin and W. J. Studden, "Tchebycheff Systems: With Applications in Analysis and Statistics," Interscience, New York, 1966.
4. T. J. Rivlin, *in* "Proceedings in the Coll. Abstract Spaces Approximation (Oberwolfach, July 1968," (P. L. Butzer and B. Sz. Nagy, Eds.), Birkhäuser Verlag, Stuttgart, 1970.
5. D. Sprecher, Simultaneous best approximations with two polynomials, *J. Approximation Theory* **2** (1969), 384–388.
6. D. Sprecher, On simultaneous Chebyshev-approximations with polynomials, *J. Approximation Theory* **4** (1971), 137–146.
7. J. Stoer, Über die Existenz von linearen Approximationsoperatoren, *in* "Funktionalanalysis, Approximationstheorie, numerische Mathematik," (L. Collatz, G. Meinardus, and H. Unger, Ed.), Birkhäuser Verlag, Stuttgart, 1967.